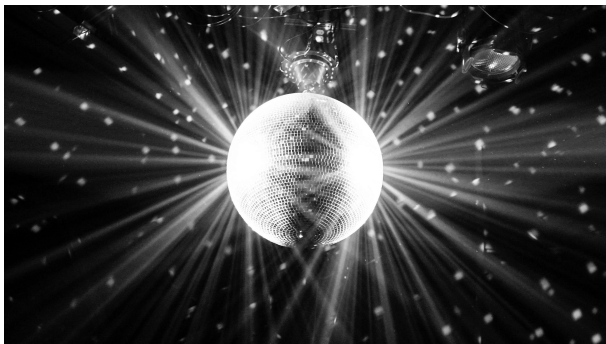


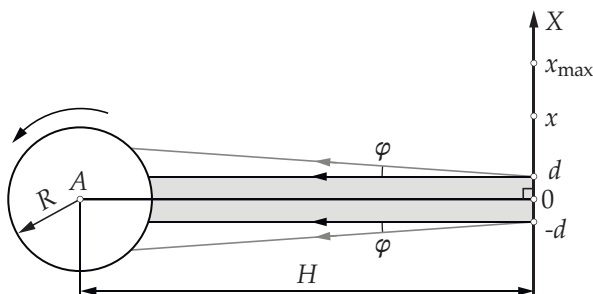


### 1. Дisko-шар (10 баллов)

Диско-шар — это шар с зеркальной поверхностью, состоящей из сотен или тысяч граней, каждая из которых — маленькое плоское зеркало. Обычно он подвешивается на потолке к устройству, которое равномерно вращает его вокруг вертикальной оси. Когда шар освещается прожекторами, зрители видят многочисленные отблески («зайчики»), бегущие по полу, стенам и потолку помещения (фото ниже). Зеркальные шары приобрели популярность в период расцвета музыкального стиля диско, в конце 70-х годов 20 века, когда их стали устанавливать в залах дискотек и ночных клубов.



Пусть шар радиусом  $R$  вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр (т. А, рис. ниже, вид сверху), совершая  $n$  оборотов в секунду. Расстояние от центра шара до вертикальной стены, совпадающей с горизонтальной осью  $OX$  на рисунке, равно  $H$  при этом  $H \gg R$ . Шар освещается пучком параллельных лучей, который формируется прожектором, расположенным на стене на той же высоте, что и центр шара. Лучи света от прожектора идут перпендикулярно стене, поперечный размер пучка равен  $2d$ .



Рассмотрим «зайчики», бегущие по стене на той же высоте, что и прожектор.

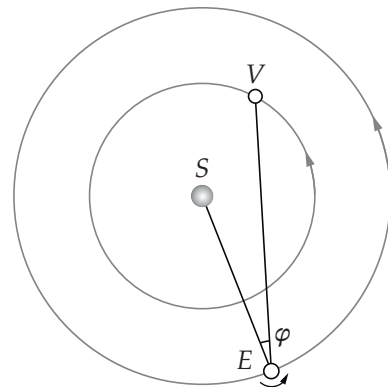
**А.** Чему равно максимальное значение координаты зайчика  $x_{\max}$ ? (2 балла)

**В.** Определите скорость  $v(x)$  движения «зайчика», проходящего точку с координатой  $x$ . (4 балла)

**С.** Пусть одинаковые маленькие плоские зеркала, покрывающие поверхность шара имеют форму квадратиков с длиной стороны  $a$  ( $a \ll R$ ). Пусть пучок света прожектора, падающий на шар, имеет небольшую расходимость (рис. выше), определяемую углом  $2\varphi$  ( $\varphi \ll 1$ , см. Указание на листе 2). Оцените максимальное значение угла  $\varphi$ , при котором хотя бы в некоторых точках стены можно будет различить отдельные «зайчики». (4 балла)

### 2. Элонгация Венеры (10 баллов)

Наблюдениям за планетой Венера с Земли мешает её близость на небе к Солнцу. Угол  $\varphi$  (см. рис.) между направлениями с Земли ( $E$ ) на планету, в данном случае на Венеру ( $V$ ), и на Солнце ( $S$ ) называется *элонгацией*; она бывает восточной и западной в зависимости от расположения планеты на небесной сфере относительно Солнца. Венеру в наибольшей западной элонгации можно наблюдать перед рассветом, а в наибольшей восточной — сразу после заката Солнца. Считается, что планета располагается западнее Солнца, если она появляется на небе раньше него.



Наибольшее значение элонгации составляет около  $46,5^\circ$ , последний раз близкие значения наблюдались с 11 по 14 августа 2020 года, причем Венера была видна на рассвете. Орбиты Земли и Венеры можно считать круговыми и лежащими в одной плоскости. Все планеты вращаются вокруг Солнца в одном направлении, Земля вращается вокруг своей оси в ту же сторону. Отклонение земной оси от перпендикуляра к плоскости вращения планет в данной задаче несущественно.

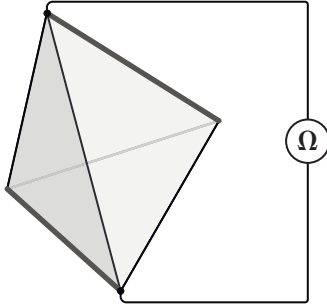
**А.** Найдите расстояние от Венеры до Солнца, если расстояние от Земли до Солнца равно 150 млн км. (4 балла)

**В.** Когда примерно можно ожидать следующий наиболее подходящий для наблюдения Венеры момент? (6 баллов)

**Продолжение задания на листе 2**

### 3. Тетраэдр (8 баллов)

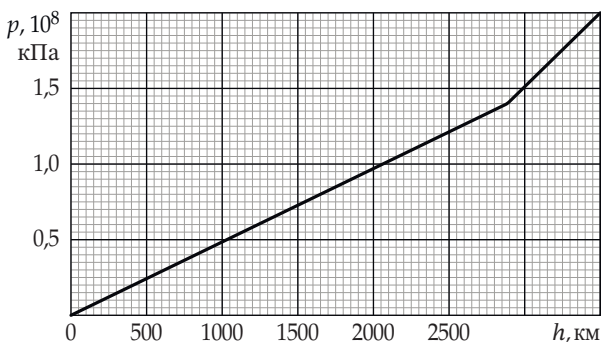
Правильный тетраэдр сделан из непроводящего материала. Его поверхность покрыта тонкой фольгой толщины  $h$ , много меньшей размеров рёбер. Удельное сопротивление материала фольги равно  $\rho$ .



К двум не соприкасающимся рёбрам вдоль всей их длины припаяли медные проволочки пренебрежимо малого сопротивления (линии увеличенной толщины на рис. выше), к которым подключили омметр. Какую величину сопротивления показывает прибор?

### 4. Плотность мантии (6 баллов)

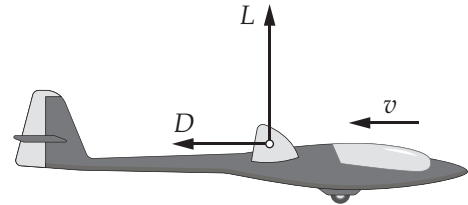
По существующим представлениям о строении Земли под слоем земной коры небольшой толщины находится мантия, состоящая из силикатных пород и простирающаяся примерно до глубины 2900 км, мантия окружает жидкое внешнее ядро. С небольших глубин из-за высоких давлений твёрдое вещество мантии начинает проявлять пластические свойства, поэтому при расчётах можно считать его жидким. На основе анализа данных о скоростях распространения сейсмических волн возникли модельные представления о распределении давления внутри Земли. В первом приближении график зависимости давления  $p$  от глубины  $h$  (при  $h \lesssim 3500$  км) состоит из двух линейных участков (рис. ниже), при этом гравитационная сила, действующая на тело массой  $m$  со стороны Земли на глубинах до 3000 км, определяется по той же формуле, что и на поверхности:  $F = mg$ . Можно считать, что ускорение свободного падения равно  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .



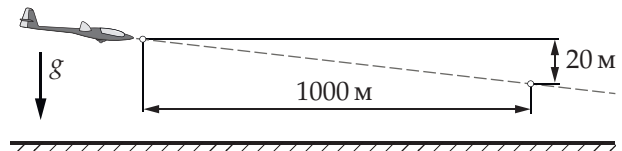
Изобразите графически зависимость плотности вещества Земли от глубины, соответствующую участку прямой пропорциональности на графике давления. На сколько изменится плотность в точке излома графика давления?

### 5. Планирование (9 баллов)

На крыло летательного аппарата со стороны набегающего на него потока воздуха, движущегося со скоростью  $v$  (относительно крыла), действуют силы, зависящие от скорости  $v$ : подъёмная сила  $L(v)$ , ортогональная скорости, и сила сопротивления  $D(v)$ , сонаправленная скорости (см. рисунок). Отношение  $K(v) = \frac{L(v)}{D(v)}$  называется *аэродинамическим качеством*. В этой задаче рассматривается полёт планера (безмоторного летательного аппарата), для которого аэродинамическое качество можно считать постоянным, не зависящим от направления и величины скорости  $v$ .



Известно, что в неподвижном (относительно земли) воздухе, планер может лететь, снижаясь, с постоянной скоростью, так что уменьшение высоты будет составлять 20 метров на каждый километр перемещения по горизонтали (рис. ниже).



Тот же планер может лететь не снижаясь со скоростью  $w = 20 \text{ м/с}$  относительно земли во встречном восходящем потоке воздуха, скорость которого относительно земли равна  $u = 5 \text{ м/с}$  и направлена под малым углом  $\alpha$  к горизонтали (см. Указание ниже). Найдите значение угла  $\alpha$ .

#### Указание

При решении задач 1 и 5 могут оказаться полезными следующие приближённые соотношения для тригонометрических функций малых углов  $\alpha$  ( $\alpha \ll 1$ ,  $[\alpha] = \text{рад}$ ):

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1, \quad \text{tg } \alpha \approx \alpha.$$